数理解析研究所講究録
600巻 1986年 151-172

Problems in String Theory

An application of harmonic maps to string theories

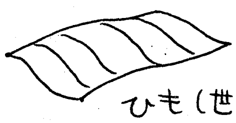
東大　理　物理　安田　修

§1. 物理的背景

近年，素粒子物理学において根本的な4つの相互作用をひもの理論[1)]から導こうという試みが盛んになされている。現実的な模型につながり得るひもの理論は超対称性を持つひもの理論(superstring と heterotic string)であるが，ここでは簡単のため bosonic string と呼ばれる単純なひもの理論を扱う。又，ひもの理論の定式化にも operator formalism の方法[1)]と Polyakov string の方法[2)]があるが，ここでは幾何学的な approach である Polyakov string を用い，harmonic map に密接な関係のある問題を提起する。

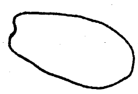
点粒子が運動すると時空内に世界線ができるように，ひもが運動すると時空内には世界面ができる。

点粒子(世界線)

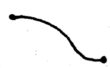


ひも(世界面)

ひもはその形状により閉じたひも(closed string)と開いたひも(open string)の2種類に分けられる。

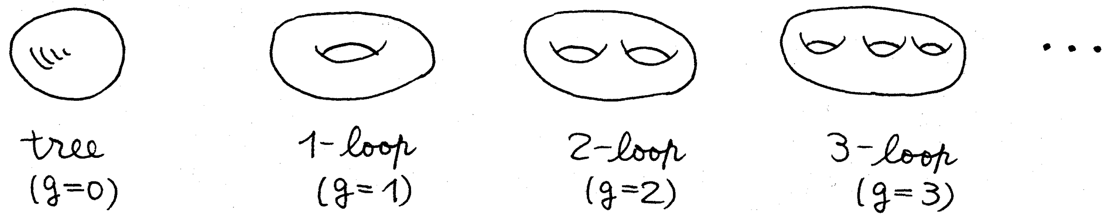


closed string



open string

ここでは終始閉じたひもを議論することにする。ひもの理論が注目されている理由は，ひもを量子化したことによって現われる発散(量子補正の発散)がないという予想(後述するtachyonの問題を除く)があるためである。しかし，現在の所，発散がないという予想は，いわゆる"2-loop"以上では全く証明されておらず，これを示すことがひもの理論で最も重要な問題である。以下に与える[問題2]はまさしくこの問題である。[問題2]では，散乱振幅のうち最も簡単な真空のエネルギーを計算することに対応している。この場合，ひもの世界面は閉じたRiemann surface (genus $= g$)になり，$g=0$に対応する散乱振幅が古典論のもの(又はtree levelと呼ばれる)，$g \geq 1$に対応するものが量子論の散乱振幅(g-loop levelの補正)である。



string理論では，このような任意のgenus gを持つRiemann surface上で真空のエネルギーを計算した場合，発散が出ないであろうと期待されている。$g=0$のときには自明に発散はなく，$g=1$のときにはtorusのなすmoduli空間上での考察により発散は出ないことが知られている[1)](後の例で現われるtachyonによる発散はこれとは別の起源による発散である)。

又，ひもが住んでいる時空が曲がっている場合にtachyonが存在するかどうかという問題([問題1])も非常に興味深い。

ここではこれらの問題が数学的にどのような問題であるかを解説する。

尚，この報告を書くに当っては，浦川肇氏に大変お世話になりました。ここで厚く感謝の意を表する次第です。

§2. Jacobi operatorとそれに対する analytic torsion

今，次の map φ を考える：

$$\varphi : (M_g, h) \longrightarrow (N, g),$$

where $\begin{cases} M_g : \text{closed Riemann surface with genus} = g \ (\geq 1) \\ N : \text{Riemannian manifold} \ (\dim_{\mathbb{R}} N = n) \end{cases}.$

φ に対して energy functional $E(\varphi)$ を定義する：

$$E(\varphi) \underset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\int_{M_g} |d\varphi|^2 v_h = \frac{1}{2}\int_{M_g} \langle h, \varphi^* g \rangle v_h ,$$

where $\begin{cases} d\varphi \in \Gamma(T^*M \otimes \varphi^{-1}TN) & : \text{differential} \\ \nabla d\varphi \in \Gamma(\mathrm{Sym}^2 T^*M \otimes \varphi^{-1}TN) & : \text{covariant differential of } d\varphi \\ v_h : \text{area 2-form on } M_g . \end{cases}$

harmonic map φ は次式を満たす：

$$\operatorname{trace} \nabla d\varphi = 0 . \qquad (*)$$

この harmonic map φ のまわりのゆらぎを考えると，$E(\varphi)$ の second variation が現われる：

$$\left.\frac{\partial^2 E(\varphi_{s,t})}{\partial s \partial t}\right|_{s=t=0} = \int_{M_g} \langle J_\varphi v, w \rangle v_h ,$$

where

$$\left.\frac{\partial \varphi_{s,t}}{\partial s}\right|_{s=t=0} = v , \quad \left.\frac{\partial \varphi_{s,t}}{\partial t}\right|_{s=t=0} = w , \quad v, w \in \Gamma(\varphi^{-1}TN) .$$

J_φ は Jacobi operator と呼ばれるものである。

$$\boxed{J_\varphi v = -\operatorname{trace} \nabla^{M_g} \nabla^{M_g} v - \operatorname{trace} R^N(d\varphi, v)\, d\varphi}$$

一般に(*)を満たすφは複数個存在すると期待されるが，ここではーつの *harmonic map* φ の *homotopy class* を固定する。ここではさらに一般的に表現

$$\rho : \Gamma = \pi_1(M_g) \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$$

に対して，それに 随したMg上の *complex vector bundle* E_ρをとり，$\varphi^{-1}TN \otimes E_\rho$ を考える。そこで

$$J_\varphi : \Gamma(\varphi^{-1}TN) \longrightarrow \Gamma(\varphi^{-1}TN)$$

を

$$J_\varphi^\rho : \Gamma(\varphi^{-1}TN \otimes E_\rho) \longrightarrow \Gamma(\varphi^{-1}TN \otimes E_\rho)$$

に拡張したものを考えよう。J^ρ_φ の固有値分解を

$$J^\rho_\varphi v_m = \lambda_m v_m \qquad v_m \in \Gamma(\varphi^{-1}TN \otimes E_\rho),\ m = 1, 2, \cdots$$

とする。φが安定であるとは，この場合 $\lambda_m \geq 0$ ($m = 1, 2, \cdots$)であることをいう(ρ = *trivial* 表現の時は，*harmonic map* の通常の安定の定義と一致する)。以下では M_g ($g \geq 0$) からのすべての *harmonic map* が安定であるような *target space* Nのみを考えることにする。

<u>Def</u> (J^ρ_φに対する *analytic torsion*)

$$\det{}' J^\rho_\varphi \underset{\mathrm{def}}{=} \exp\left[-\frac{d}{ds}\zeta_\varphi(s)\Big|_{s=0}\right]$$

where

$$\zeta_\varphi(s) \underset{\mathrm{def}}{=} \sum_{\lambda_m > 0} \lambda_m^{-s}$$

$$J^\rho_\varphi v_m = \lambda_m v_m \qquad v_m \in \Gamma(\varphi^{-1}TN \otimes E_\rho),\ \rho : \pi_1(M_g) \to GL(n, \mathbb{C})$$

但し，$\det' J^{\rho}_{\varphi}$ の prime は J^{ρ}_{φ} の零固有値を除くという意味である。

NB　$\det' J^{\rho}_{\varphi}$ は $\pi_1(M_g)$ の表現 ρ に依存している。

他方，$\rho=$ trivial 表現 $\mathbb{1}$，φ が M_g の identity map $I: M_g \to M_g$ のときに，$J_I \underset{\mathrm{def}}{=} J^{\mathbb{1}}_I$ の analytic torsion を次のように定義する。

Def　(J_I に対する analytic torsion)

$$\det' J_I \underset{\mathrm{def}}{=} \exp\left[-\frac{d}{ds}\zeta_I(s)\Big|_{s=0}\right]$$

where

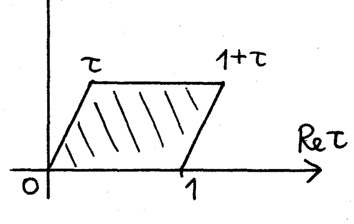
$$\zeta_I(s) \underset{\mathrm{def}}{=} \sum_{\lambda^\circ_m>0} (\lambda^\circ_m)^{-s}$$

$$J_I v^\circ_m = \lambda^\circ_m v^\circ_m, \qquad v^\circ_m \in \Gamma(I^{-1}TM_g), \quad m=1,2,\cdots$$

$$J_I v^\circ = -\mathrm{trace}\,\nabla^{M_g}\nabla^{M_g} v^\circ - \mathrm{Ricci}(v^\circ), \qquad v^\circ \in \Gamma(I^{-1}TM_g)$$

$g=1$ の Riemann surface

$g=1$ の Riemann surface は $\mathbb{C}/\Gamma$ と書ける。ここで Γ は $\{1,\tau\}$ ($\mathrm{Im}\,\tau>0$) で生成される lattice，τ は $\mathbb{C}/\Gamma$ の Teichmüller parameter である。以下 $\pi_2(N)=\{0\}$ とする。



2 次元 torus T^2 から N への map のなす homotopy 数 α を任意に固定しておく。

さて，２次元 torus T^2 の conformal class 全体の moduli 空間 D は

$$D=\{\tau\in\mathbb{C}\ ;\ |\tau|\geq 1,\ -\tfrac{1}{2}\leq \mathrm{Re}\,\tau\leq \tfrac{1}{2},\ \mathrm{Im}\,\tau>0\}$$

となる。各 $\tau\in D$ に対し，複素 torus $\mathbb{C}/\Gamma$ が決まる。harmonic map $\varphi_\tau:\mathbb{C}/\Gamma\longrightarrow N$ で $[\varphi_\tau]=\alpha$ かつエネルギー最小のものを取る(これは，Lemaire，Sacks-Uhlenbeck によって存在が保証されている)。

<u>Def</u> ($\varphi_\tau:\mathbb{C}/\Gamma\longrightarrow N$ に対する partition function)

$$Z_1^\alpha \underset{\text{def}}{=} \int_D d\tau d\bar\tau\,(\mathrm{Im}\,\tau)^{\frac{N_0}{2}-3}\,\det{}'J_{I_\tau}\left(\det{}'J^\rho_{\varphi_\tau}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

where

J_{I_τ} : $\mathbb{C}/\Gamma$ の identity map I_τ の Jacobi operator

$J^\rho_{\varphi_\tau}:\ \Gamma(\varphi_\tau^{-1}TN\otimes E_\rho)\longrightarrow\Gamma(\varphi_\tau^{-1}TN\otimes E_\rho)$

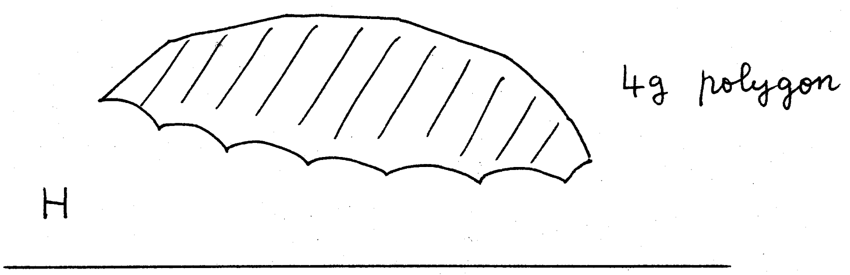
$N_0 \underset{\text{def}}{=}$ # of zero eigenvalues of $J^\rho_{\varphi_\tau}:\Gamma(\varphi_\tau^{-1}TN\otimes E_\rho)\to\Gamma(\varphi_\tau^{-1}TN\otimes E_\rho)$

$\rho:\ \Gamma=\pi_1(\mathbb{C}/\Gamma)\longrightarrow GL(n,\mathbb{C})$

<u>$g\geq 2$ の Riemann surface</u>

$g\geq 2$ の Riemann surface は H/Γ と書ける。ここで H は上半平面，Γ は Fuchsian group である。前述の場合と同様に $\pi_2(N)=\{0\}$ とし，$g\geq 2$ を固定する。genus $g\geq 2$ の Riemann surface から N への map のなす homotopy 類 β を任意に固定する。そこで，$g=1$ の時と同様に，$g\geq 2$ の Riemann surface の conformal class 全体 D_g

は 3g−3 個の Teichmüller parameters $\{\tau_1, \cdots, \tau_{3g-3}\}$ をもつ空間として書けている。そこで，各 parameter $\tau = (\tau_1, \cdots, \tau_{3g-3})$ に対して対応する Fuchsian group $\Gamma = \Gamma(\tau)$ をとり g を genus に持つ Riemann surface H/Γ から N への harmonic map $\varphi_\tau : H/\Gamma \to N$ で $[\varphi_\tau] = \beta$ かつ エネルギー最小のものをとっておく。



Def　($\varphi_\tau : H/\Gamma \to N$ に対する partition function)

$$Z_g^\beta \underset{\mathrm{def}}{=} \int_{D_g} d\tau \ \{vol(H/\Gamma(\tau))\}^{3g-3+\frac{N_0}{2}} \det{}' J_{I_\tau} (\det{}' J^\rho_{\varphi_\tau})^{-\frac{1}{2}}$$

where

$d\tau$ = D_g 上の"適当な"測度（これは後に generalized Modular invariance から決める）

I_τ = $H/\Gamma(\tau)$ の identity map

$J^\rho_{\varphi_\tau}$, N_0, ρ は $g=1$ の場合と同じ

[問題 1]

Z_1^α における $\tau, \bar{\tau}$ に関する積分が収束する Riemannian manifold N はあるか？ 特に，N が Ricci-flat の場合はどうか？

[問題2]

genus $g(\geq 2)$ の Riemann surface の conformal class 全体 D_g の explicit な形を求む。各 $\tau \in D_g$ に対して $\mathrm{vol}(H/\Gamma(\tau))$, $\det' J_{I_\tau}$, $\det' J^{\rho}_{\varphi_\tau}$ を $\tau = \{\tau_i\}$ $(1 \leq i \leq 3g-3)$ の関数として explicit に表わせ。
Z^{β}_g $(g \geq 2)$ における $\tau = \{\tau_i\}$ $(1 \leq i \leq 3g-3)$ に関する積分が収束する Riemannian manifold N はあるか?

§3. Examples

bosonic string においては conformal invariance という要求から，N が flat のときは，$n = \dim_{\mathbb{R}} N = 26$ である必要があり，ここでは最初から $N = T^{26}$ とおく。

[example 1]

$$\varphi_\tau : \mathbb{C}/\Gamma_\tau \longrightarrow T^{26}$$
, $\Gamma_\tau = \{1, \tau\}$により生成される lattice

ここでは Jacobi operator が作用する $v \in \Gamma(\varphi^{-1}TN \otimes E_\rho)$ の持つ表現 ρ を trivial 表現 $\mathbb{1}$ とする（i.e., $\Gamma_\tau = \pi_1(\mathbb{C}/\Gamma_\tau) \ni \gamma$, $\rho(\gamma) = \mathbb{1}$）。この場合，$\mathbb{C}/\Gamma_\tau$ の local coordinate (x^1, x^2) を $z = x^1 + \tau x^2$ とし，$\mathbb{C}/\Gamma_\tau$ の metric を $ds^2 = |dx^1 + \tau dx^2|^2$ とすると，$J^{\mathbb{1}}_{\varphi_\tau}$ と J_{I_τ} の固有値はともに

$$\lambda_{mn} = \left(\frac{2\pi}{\mathrm{Im}\,\tau}\right)^2 |m - n\tau|^2 \qquad m, n \in \mathbb{Z}$$

となる。ここで cutoff $\epsilon > 0$ を含む zeta function を導入する：

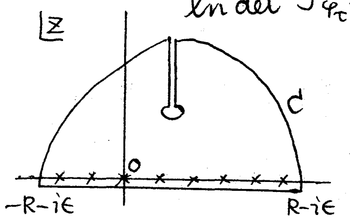
$$\zeta_\epsilon(s) \underset{\mathrm{def}}{=} \sum_{m,n} \left[\left(\frac{2\pi}{\mathrm{Im}\,\tau}\right)^2 \left(|m - n\tau|^2 + \epsilon^2\right) \right]^{-s}$$

これを用いると $\det' J^{\mathbb{1}}_{\varphi_\tau}$ は

$$\ln \det' J^{\mathbb{1}}_{\varphi_\tau} = - \lim_{\substack{s \to 0 \\ \epsilon \to 0}} \frac{d}{ds} \left[\zeta_\epsilon(s) - \left(\frac{2\pi\epsilon}{\mathrm{Im}\,\tau}\right)^{-2s} \right]$$

と表わせる。この計算は1973年に Ray−Singer[4] によって行なわれているが，ここでは ref. 5) に従って $\det' J^{\mathbb{1}}_{\varphi_\tau}$ を計算する。

留数定理より$\zeta_\epsilon(s)$におけるmの和はcontour積分におきかえられる:



$$\ln \det{}' J^{\mathbb{1}}_{\varphi_\tau} = \lim_{\substack{s\to 0\\ \epsilon\to 0}} \Big[-\frac{d}{ds}\Big\{\Big(\frac{2\pi}{\mathrm{Im}\,\tau}\Big)^{-2s} \sum_n \int_C dz\, \frac{2e^{i\pi z}}{e^{i\pi z}-e^{-i\pi z}} \big[(z-n\,\mathrm{Re}\,\tau)^2+(n\,\mathrm{Im}\,\tau)^2+\epsilon^2\big]^{-s} + c.c.\Big\}$$
$$+\frac{d}{ds}\Big\{\Big(\frac{2\pi}{\mathrm{Im}\,\tau}\Big)^{-2s} \sum_n \int_C dz\, \big[(z-n\,\mathrm{Re}\,\tau)^2+(n\,\mathrm{Im}\,\tau)^2+\epsilon^2\big]^{-s} + c.c.\Big\}$$
$$-\Big(\frac{2\pi\epsilon}{\mathrm{Im}\,\tau}\Big)^{-2s} \ln\Big(\frac{2\pi\epsilon}{\mathrm{Im}\,\tau}\Big)^2 \Big]$$

上式で第一項は$s=0$で収束し,

$$4\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left|1-e^{2\pi i n\tau}\right| + \ln(2\pi\epsilon)^2 + O(\epsilon^2)$$

となり, 第二項は$s>1$で収束し,

$$\frac{d}{ds}\Big[\frac{2^{1-2s}\sin\pi s}{\cos\pi s}\,\frac{\Gamma^2(1-s)}{\Gamma(2-2s)}\big(\epsilon^{1-2s}+2(\mathrm{Im}\,\tau)^{1-2s}\zeta(2s-1)+O(\epsilon^2)\big)\Big]$$
$$\xrightarrow[\substack{s\to 0\\ \epsilon\to 0}]{} 4\pi\,\mathrm{Im}\,\tau\,\zeta(-1) = -\frac{\pi}{3}\mathrm{Im}\,\tau$$

となるので,

$$\det{}' J^{\mathbb{1}}_{\varphi_\tau} = (\mathrm{Im}\,\tau)^2\, e^{-\frac{\pi}{3}\mathrm{Im}\,\tau} \prod_{n=1}^{\infty}\left|1-e^{2\pi i n\tau}\right|^4$$
$$= (\mathrm{Im}\,\tau)^2\, |\eta(\tau)|^4$$

を得る。ここで

$$\eta(\tau) = e^{i\pi\tau/12}\prod_{n=1}^{\infty}(1-e^{2\pi i n\tau})$$

はDedekind η-functionである。$N_0 \overset{\mathrm{def}}{=}$ # of zero eigenvalues of $J^{\mathbb{1}}_{\varphi_\tau}$ $=26$ ゆえ, 最終的なZ^α_1の表式は

$$Z^\alpha_1 = \int_D \frac{d\tau\, d\bar\tau}{(\mathrm{Im}\,\tau)^2}\,(\mathrm{Im}\,\tau)^{-12}\,|\eta(\tau)|^{-48}$$

となる。今, $T\in SL(2,\mathbb{Z})$として, $\tau \mapsto T\tau = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$なるModular変換を考えると

$$\mathrm{Im}\,\tau \longmapsto \frac{\mathrm{Im}\,\tau}{|c\tau+d|^2}$$

$$d\tau d\bar{\tau} \longmapsto \frac{d\tau d\bar{\tau}}{|c\tau+d|^4}$$

$$|\eta(\tau)| \longmapsto |c\tau+d|^{\frac{1}{2}}|\eta(\tau)|$$

ゆえ，$d\tau d\bar{\tau}/(\mathrm{Im}\,\tau)^2$，$(\mathrm{Im}\,\tau)^{-12}|\eta(\tau)|^{-48}$ はそれぞれ Modular 変換に対して不変になっている。従って，D として fundamental region $\{\tau \mid |\tau|\geq 1, -\frac{1}{2}\leq \mathrm{Re}\,\tau \leq \frac{1}{2}, \mathrm{Im}\,\tau>0\}$ に限ることが許される。Z_1^{α} の integrand は $\mathrm{Im}\,\tau\to+\infty$ で $e^{4\pi\,\mathrm{Im}\,\tau}$ のふるまいを示すので $\tau,\bar{\tau}$ に関する積分は発散する。これは flat な時空における bosonic string が tachyon を持つことの帰結であり，この bosonic string は安定な真空とはなっていない。

[example 2][6)]

$$\varphi_\tau : \mathbb{C}/\Gamma_\tau \longrightarrow T^{26}$$

今度の例では $\Gamma_\tau = \pi_1(\mathbb{C}/\Gamma_\tau)$ の表現 ρ を

$$\rho(m+n\tau) = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{10} & 0 \\ 0 & e^{in\pi}\,\mathbb{1}_{16} \end{pmatrix} \in GL(26,\mathbb{C})$$

$$= \rho_1 \oplus \rho_2$$

where $\rho_1 = \mathbb{C}^{10}$ での恒等表現，$\rho_2 = \mathbb{C}^{16}$ での表現とする。

$$E_\rho \cong E_{\rho_1} \oplus E_{\rho_2}$$

ここで，E_{ρ_1}，E_{ρ_2} はそれぞれ ρ_1, ρ_2 に同伴した $\mathbb{C}/\Gamma_\tau$ 上の vector bundleである。

$$\varphi_\tau^{-1}TN\otimes E_\rho=(\varphi_\tau^{-1}TN\otimes E_{\rho_1})\oplus(\varphi_\tau^{-1}TN\otimes E_{\rho_2})$$

より，各元 $V\in\Gamma(\varphi_\tau^{-1}TN\otimes E_\rho)$ は

$$V=(V_1,V_2)\quad,\quad V_j\in\Gamma(\varphi_\tau^{-1}TN\otimes E_{\rho_j})\ (j=1,2)$$

と思ってよい。$\mathbb{C}/\Gamma_\tau$ の metric を $ds^2=|dx^1+\tau dx^2|^2$ とすると，$J^\rho_{\varphi_\tau}$, J_{I_τ} の固有値はそれぞれ

$$\lambda_{mn}=\begin{cases}\left(\frac{2\pi}{\mathrm{Im}\tau}\right)^2|m-n\tau|^2 & \text{for } v^1_{mn}\in\Gamma(\varphi_\tau^{-1}TN\otimes E_{\rho_1})\\ \left(\frac{2\pi}{\mathrm{Im}\tau}\right)^2|m-(n+\frac{1}{2})\tau|^2 & \text{for } v^2_{mn}\in\Gamma(\varphi_\tau^{-1}TN\otimes E_{\rho_2})\end{cases}$$

$$\lambda_{mn}=\left(\frac{2\pi}{\mathrm{Im}\tau}\right)^2|m-n\tau|^2\qquad \text{for } v\in\Gamma(I_\tau^{-1}T\,\mathbb{C}/\Gamma_\tau)$$

となる。$\det' J_{I_\tau}$ は前述の例と同じものになり，$\det' J^\rho_{\varphi_\tau}$ は

$$\det' J^\rho_{\varphi_\tau}=\left[e^{-\frac{\pi}{3}\mathrm{Im}\tau}\prod_{n=1}^\infty|1-q^{2n}|^4\right]^{10}\cdot\left[e^{\frac{\pi}{6}\mathrm{Im}\tau}\prod_{n=1}^\infty|1-q^{2n-1}|^4\right]^{16}$$
$$=\det' J_{I_\tau}\prod_{n=1}^\infty|1-q^{2n}|^{32}\cdot|1-q^{2n-1}|^{64}$$

where

$$q\underset{\mathrm{def}}{=}e^{i\pi\tau}$$

となる。オ1式オ2項の $e^{\frac{\pi}{6}\mathrm{Im}\tau}$ の中の $+\frac{1}{6}$ の係数は $4\sum_{n=0}^\infty(n+\frac{1}{2})^{1-2s}$ $=4(2^{2s-1}-1)\zeta(2s-1)\xrightarrow[s\to0]{}-2\zeta(-1)=\frac{1}{6}$ より出たものである。($\mathrm{cf.}$ for $\det' J_{I_\tau}$ $\quad 4\sum_{n=1}^\infty n^{1-2s}=4\zeta(2s-1)\xrightarrow[s\to0]{}4\zeta(-1)=-\frac{1}{3}$) 今の例では $N_0=(\#\text{ of zero eigenvalues of } J^\rho_{\varphi_\tau})=10$ ゆえ，結局，

$$Z_1^\alpha=\int_D d\tau d\bar\tau\,(\mathrm{Im}\tau)^{5-3}\det' J_{I_\tau}\left(\det' J^\rho_{\varphi_\tau}\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$=\int_D\frac{d\tau d\bar\tau}{(\mathrm{Im}\tau)^2}(\mathrm{Im}\tau)^{-4}\prod_{n=1}^\infty|1-q^{2n}|^{-16}\cdot|1-q^{2n-1}|^{-32}$$
$$=\int_D\frac{d\tau d\bar\tau}{(\mathrm{Im}\tau)^2}(\mathrm{Im}\tau)^{-4}\prod_{n=1}^\infty\left|\frac{1+q^n}{1-q^n}\right|^{16}$$

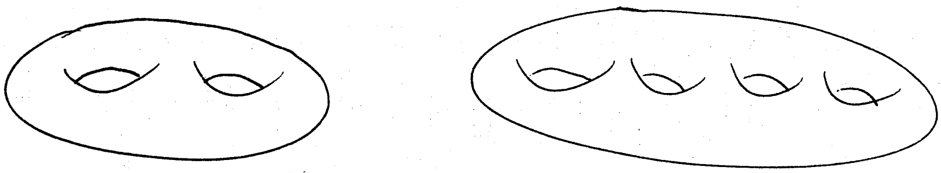
と変形できる。Z_1^{α} の integrand は fundamental region D において有限であり，積分は収束する。すなわちこの model には tachyon は現われない。

[example 3][7)]

genus 2 以上の Riemann surface からの harmonic map

$$\varphi_\tau : H/\Gamma(\tau) \quad (g \geq 2) \longrightarrow T^{26}$$

を考える。これは物理的には g-loop $(g \geq 2)$ の計算に対応している。

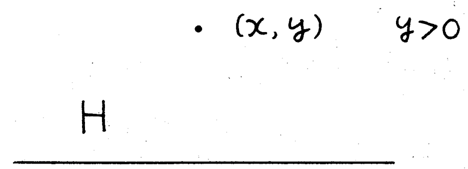


etc

ここでは ρ を恒等表現とする $(i.e.,\ \Gamma(\tau) = \pi_1(H/\Gamma(\tau)) \ni \gamma,\ \rho(\gamma) = \mathbb{1})$。

$H/\Gamma(\tau)$ の local coordinate を (x, y) とし，$H/\Gamma(\tau)$ の metric として Poincaré metric を導入する：

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$



この場合の $J^{\rho}_{\varphi_\tau}$, J_{I_τ} はそれぞれ次のようになる。

$$J^{\rho}_{\varphi_\tau} = -\,\mathrm{trace}\,\nabla^{M_g}\nabla^{M_g} = -y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

$$J_{I_\tau} = -\,\mathrm{trace}\,\nabla^{M_g}\nabla^{M_g} - \mathrm{Ricci}\,(\cdot) = -y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + 1.$$

$\det' J^{\rho}_{\varphi_\tau}$, $\det' J_{I_\tau}$を計算する際，Selbergのtrace formula[8]を用いると便利である。今，$J^{\rho}_{\varphi_\tau}$の固有値をλ_m $(m=1,2,\cdots)$とし，$\lambda_m=\frac{1}{4}+r_m^2$ $(m=1,2,\cdots)$とおく。適当な条件[8]を満たすC^∞-function $h(r)$に対し，次式が成り立つ。

(Selberg's trace formula)

$$\sum_{m=1}^{\infty} h(r_m) = \frac{A(\mathcal{F})}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} r\,h(r)\tanh(\pi r)\,dr + \sum_{\{T\}_p}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln N(T_0)}{N(T_0)^{n/2}-N(T_0)^{-n/2}}\,g(n\ln N(T_0))$$

where

$$g(x) \underset{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(r)e^{-irx}dr$$

$\{T\}_p$: primitive inconjugacy class of $T\in\Gamma$ (Fuchsian group)

T_0 : Γの primitive element $({}^{\exists}T_0\, {}^{\exists}m\in\mathbb{Z}\,;\ \Gamma\ni{}^{\forall}T=T_0{}^{m})$

$$N(T) \underset{\mathrm{def}}{=} \left[\frac{\mathrm{tr}T}{2}+\sqrt{\left(\frac{\mathrm{tr}T}{2}\right)^2-1}\right]^2 \underset{\mathrm{def}}{=} e^{l_T} > 1 \quad : \text{multiplier of } T$$

$$A(\mathcal{F}) \underset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{vol}(H/\Gamma(\tau))$$

ここで$h(r)$として$h(r)=e^{-(r^2+\frac{1}{4}+\epsilon)t}$ $(r\in\mathbb{R},\ \epsilon>0)$とおき，$\sum_{m=1}^{\infty}h(r_m)$をmellin変換する。

$$\zeta_\epsilon(s) \underset{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty dt\, t^{s-1}\sum_{m=1}^{\infty}e^{-(r_m^2+\frac{1}{4}+\epsilon)t} - \epsilon^{-s}$$

$-\epsilon^s$は$\zeta_\epsilon(s)$を$s=0$でmeromorphicにするため付け加えた項である。[9] Selbergのtrace formulaを用いて$\zeta_\epsilon(s)$を計算すると $(e^{l_T}\underset{\mathrm{def}}{=}N(T_0))$

$$\zeta_\epsilon(s) = \frac{A(\mathcal{F})}{8(s-1)}\int_{-\infty}^{\infty}\left(r^2+\frac{1}{4}+\epsilon\right)^{1-s}\mathrm{sech}^2(\pi r)\,dr + \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{1}{2\sqrt{4\pi t}}\sum_{\{T\}_p}\sum_{n=1}^{\infty} l_T\,\mathrm{cosech}\left(\frac{n l_T}{2}\right)e^{-(\frac{1}{4}+\epsilon)t-n^2l_T^2/4t} - \epsilon^{-s}$$

となり，$\epsilon\downarrow 0$の極限をとると

$$\zeta(s) \underset{\mathrm{def}}{=} \lim_{\epsilon\downarrow 0} \zeta_\epsilon(s)$$

$$= \frac{A(\mathcal{F})}{8(s-1)} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{4}+r^2\right)^{1-s} \mathrm{sech}^2(\pi r)\,dr$$

$$+ \lim_{\epsilon\downarrow 0} \left[\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sum_{\{T\}_p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(s)} \sqrt{\frac{\ell_T}{n}}\, \mathrm{cosech}\left(\frac{n\ell_T}{2}\right) (n\ell_T)^s K_{1/2-s}\left(\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)n\ell_T\right) - \epsilon^{-s} \right]$$

$$\therefore -\zeta'(0) = -f(\{\tau\})$$

$$+ \lim_{\substack{s\to 0\\ \epsilon\downarrow 0}} \left[\frac{\psi(s)}{\Gamma(s)\sqrt{4\pi}} \sum_{\{T\}_p} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{\ell_T}}\, \mathrm{cosech}\left(\frac{n\ell_T}{2}\right) K_{1/2}\left(\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)n\ell_T\right) - \ln\epsilon \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\Gamma(s)} \times (\text{regular at } s=0) \right]$$

但し,

$$f(\{\tau\}) \underset{\mathrm{def}}{=} \frac{A(\mathcal{F})}{8} \int_{-\infty}^{\infty} \left(r^2+\frac{1}{4}\right) \left[\ln\left(r^2+\frac{1}{4}\right) - 1 \right] \mathrm{sech}^2(\pi r)\,dr$$

$$K_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{-z}$$

$$\therefore \det{}' J^{\rho}_{\varphi_\tau} = e^{-f(\{\tau\})} \exp \lim_{\epsilon\downarrow 0} \left[-\sum_{\{T\}_p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{e^{-\epsilon n\ell_T}}{e^{n\ell_T}-1} - \ln\epsilon \right]$$

exponential のオ２項は Selberg zeta function $Z(s)$[8] で書ける。

ここで

$$Z(s) \underset{\mathrm{def}}{=} \prod_{\{T\}_p} \prod_{n=0}^{\infty} \left[1-e^{-(s+n)\ell_T}\right]$$

であり，両辺の log をとると

$$\ln Z(s) = \sum_{\{T\}_p} \sum_{n=0}^{\infty} \ln\left[1-e^{-(s+n)\ell_T}\right]$$

$$= -\sum_{\{T\}_p} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} e^{-m(s+n)\ell_T}$$

$$= -\sum_{\{T\}_p} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{e^{-sm\ell_T}}{1-e^{-m\ell_T}}$$

であるから，

$$\det{}' J^{\rho}_{\varphi_\tau} = e^{-f(\{\tau\})} \exp \lim_{\epsilon\downarrow 0} \ln \frac{Z(1+\epsilon)}{\epsilon}$$

$$= e^{-f(\{\tau\})} Z'(1)$$

ここで $Z(1)=0$[8] を用いた。

一方，$\det' J_{I\tau}$の方は$h(r)$として$h(r)=e^{-(r^2+\frac{9}{4}+\epsilon)t}$とおき，

全く同様の計算をすると(この場合には$-\epsilon^{-s}$は不要)

$$
\begin{aligned}
-\zeta'(0) = & -f_I(\{\tau\}) \\
& + \lim_{\substack{s\to 0\\ \epsilon\downarrow 0}}\left[\frac{\psi(s)}{\Gamma(s)\sqrt{4\pi}}\sum_{\{\tau\}_p}\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n}{l_\tau}}\,\operatorname{cosech}\left(\frac{nl_\tau}{2}\right)K_{1/2}\left(\left(\frac{3}{2}+\frac{\epsilon}{3}\right)nl_\tau\right)\right]
\end{aligned}
$$

但し，

$$
f_I(\{\tau\}) \underset{def}{=} \frac{A(\mathcal{F})}{8}\int_{-\infty}^{\infty}\left(r^2+\frac{9}{4}\right)\operatorname{sech}^2(\pi r)\left[\ln\left(r^2+\frac{9}{4}\right)-1\right]dr
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore \det' J_{I\tau} &= e^{-f_I(\{\tau\})}\exp\lim_{\epsilon\downarrow 0}\left[-\sum_{\{\tau\}_p}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{e^{-(1+\epsilon)nl_\tau}}{e^{nl_\tau}-1}\right] \\
&= e^{-f_I(\{\tau\})}Z(2)\ .
\end{aligned}
$$

従って最終的なZ_gの形は

$$
Z_g^{\beta} = \int_{D_g} d\tau_1 d\bar{\tau}_1\cdots d\tau_{3g-3}\,d\bar{\tau}_{3g-3}\,\{vol(H/\Gamma(\tau))\}^{3g+10}e^{-f_I(\{\tau\})+13f(\{\tau\})}Z(2)\,(Z'(1))^{-13}
$$

となる。この積分が収束するかどうかは，$vol(H/\Gamma(\tau))$，$Z(2)$，$Z'(1)$が$\{\tau_i\}$のどういう関数であるかということと，*fundamental region* D_gがどのような範囲かということを知って初めてわかることである。

§4. partition function の定義式の導出

ここで先に定義した partition function を，もともとの定義式から導出しておく。

partition function Z はもともと次の path integral により定義されている。

$$Z \underset{\text{def}}{=} \frac{1}{\Omega_{\text{diff}}\Omega_{\text{conf}}} \int \prod_{\mu,\nu=1}^{2} \mathcal{D}h_{\mu\nu} \int \prod_{i=1}^{n} \mathcal{D}\varphi^i \, e^{-E(\varphi)},$$

where

$$\varphi : (M_g, h) \longrightarrow (N, g), \quad \dim_{\mathbb{R}} N = n$$

$$E(\varphi) \underset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\int_{M_g} h^{\mu\nu} g_{ij} \partial_\mu \varphi^i \partial_\nu \varphi^j \sqrt{h}\, d^2x \qquad : \textit{energy}$$

$$\underset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\int_{M_g} \langle h, \varphi^* g \rangle v_h$$

Ω_{diff} = volume of diffeomorphism group

Ω_{conf} = volume of conformal transformation group.

ここでは Callan et al[3] に従って一般の Riemannian manifold N を target とする場合の string を定式化している。

φ を harmonic map φ_0 のまわりで展開する。すなわち，

$$\varphi^i = \varphi_0^i + \Phi^i$$

ここで Φ^i は complex vector bundle の section

$$\Phi \in \Gamma(\varphi^{-1}TN \otimes E_\rho)$$

$$\rho : \Gamma = \pi_1(M_g) \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$$

であり，$\pi_1(M_g)$ の表現 ρ は一つ固定するものとする。この分解に伴ない，$\mathcal{D}\varphi^i$，$E(\varphi)$ は

$$\int \prod_i \mathcal{D}\varphi^i = \int \prod_i \mathcal{D}\varphi_0^i \int \prod_i \mathcal{D}\tilde{\varphi}^i$$

$$E(\varphi) = E(\varphi_0 + \tilde{\varphi}) = E(\varphi_0) + \frac{1}{2}\int_{M_g} \langle J^{\rho}_{\varphi_0}\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi} \rangle v_h + O(\tilde{\varphi}^3)$$

となるが，ここでは harmonic map φ_0 の homotopy class を1つ固定して考えるので，φ_0についての和は(i.e., $\int \prod_i \mathcal{D}\varphi_0^i$ は)必要ない。

一方，M_g上の metric の無限小変換は $a = 1$ (if $g=1$), $1 \leq a \leq 3g-3$ (if $g \geq 2$) として

$$\delta h_{\mu\nu} = \underbrace{\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu}_{\text{diffeomorphism}} + \underbrace{\varphi h_{\mu\nu}}_{\text{conformal transf.}} + \underbrace{\tau^a_{\mu\nu}\tau^a_{\mu\nu} + \bar{\tau}^a_{\mu\nu}\bar{\tau}^a_{\mu\nu}}_{\text{Teichmüller deformation}}$$

ゆえ，変数変換より[5),10)]

$$\int \prod_{\mu,\nu} \mathcal{D}h_{\mu\nu} = \int \prod_\mu \mathcal{D}\xi^\mu \int \mathcal{D}\varphi \int_{\text{moduli}} \prod_a \mathcal{D}\tau^a \mathcal{D}\bar{\tau}^a \; \frac{\partial(h_{\mu\nu})}{\partial(\xi^\mu, \varphi, \tau^a, \bar{\tau}^a)}$$

ここで

$$\int \prod_\mu \mathcal{D}\xi^\mu = \Omega_{\text{diff}}$$

$$\int \mathcal{D}\varphi = \Omega_{\text{conf}}$$

$$\frac{\partial(h_{\mu\nu})}{\partial(\xi^\mu, \varphi, \tau^a, \bar{\tau}^a)} = \begin{cases} \det{}' J_I \, (\mathrm{Im}\,\tau)^{\frac{N_0}{2}-3} & \text{if } g=1 \\ \det{}' J_I \, (\mathrm{vol}(M_g))^{3g-3+\frac{N_0}{2}} & \text{if } g \geq 2 \end{cases}$$

$N_0 \underset{\text{def}}{=}$ # of zero eigenvalues of $J^{\rho}_{\varphi_0}$

I は identity map $I: M_g \to M_g$

であり，$\tau^a, \bar{\tau}^a$ の積分は moduli 空間に限って積分することにする。

従って結局，partition function は $\int \prod_i \mathcal{D}\varphi_0^i$ と $e^{-E(\varphi_0^i)}$ を無視することにより

$$Z = \sum_{g=0}^{\infty} \int_{moduli} \prod_a \mathcal{D}\tau^a \mathcal{D}\bar{\tau}^a \frac{\partial(h_{\mu\nu})}{\partial(\xi^\mu, \varphi, \tau^a, \bar{\tau}^a)} \int \prod_i \mathcal{D}\varphi^i$$

$$\times \exp\left[-\frac{1}{2}\int_{M_g} < J^{\rho}_{\varphi_0}\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi} > v_R + O(\tilde{\varphi}^3)\right]$$

$$= \sum_{g=0}^{\infty} \int \prod_a \mathcal{D}\tau^a \mathcal{D}\bar{\tau}^a \frac{\partial(h_{\mu\nu})}{\partial(\xi^\mu, \varphi, \tau^a, \bar{\tau}^a)} \left(\det{}' J^{\rho}_{\varphi_0}\right)^{-\frac{1}{2}} \left[1 + O(\hbar)\right]$$

$$= \det{}' J_I \left(\det{}' J^{\rho}_{\varphi_0}\right)^{-\frac{1}{2}} \qquad : g=0$$

$$+ \int_{moduli} \mathcal{D}\tau \mathcal{D}\bar{\tau} \left(\mathrm{Im}\,\tau\right)^{\frac{N_0}{2}-3} \det{}' J_I \left(\det{}' J^{\rho}_{\varphi_0}\right)^{-\frac{1}{2}} \qquad : g=1$$

$$+ \sum_{g=2}^{\infty} \int_{moduli} \prod_{a=1}^{3g-3} \mathcal{D}\tau^a \mathcal{D}\bar{\tau}^a \left(\mathrm{vol}(M_g)\right)^{3g-3+\frac{N_0}{2}} \det{}' J_I \left(\det{}' J^{\rho}_{\varphi_0}\right)^{-\frac{1}{2}} \qquad : g \geq 2$$

となる。ここで$\hbar$(Planck 定数)の高次は無視した。このようにして§2 における Z_1^α, Z_g^β $(g \geq 2)$ の表式を得る。

References

1) J. H. Schwarz, 'Superstring theory', Phys. Reports 89 ('82) 223.

2) A. M. Polyakov, 'Quantum geometry of bosonic string', Phys. Lett. 103B ('81) 207. See also D. Friedan, 'Introduction to Polyakov's string theory' in Les Houches XXXIX, 1982, Recent Advances

in Field Theory and Statistical Mechanics, ed. by J-B. Zuber and R. Stora (North Holland, 1984); O. Alvarez, 'Theory of strings with boundaries: fluctuations, topology and quantum geometry', Nucl. Phys. B216 ('83) 125.

3) C.G. Callan, E.J. Martinec, M.J. Perry and D. Friedan, 'Strings in background fields', Nucl. Phys. B262 ('85) 593.

4) D.B. Ray and I.M. Singer, 'Analytic torsion for complex manifolds', Ann. Math. 98 ('73) 154.

5) J. Polchinski, 'Evaluation of the one loop string path integral', Univ. of Texas preprint UTTG-13-85 (to be published in Comm. Math. Phys.).

6) C. Vafa and E. Witten, 'Bosonic string algebras', Phys. Lett. 159B ('85) 265.

7) E. Gava et al., 'Multiloop divergences in the closed bosonic string theory', Phys. Lett. 168B ('86) 207; A.A. Belavin and V.G. Knizhnik, 'Algebraic geometry and the geometry of quantum string', ibid, 201; E. D'Hoker and D.H. Phong, 'Multiloop amplitudes for the bosonic Polyakov string', Nucl. Phys. B269 ('86) 205; 'Length-twist parameters in string path integrals', Phys. Rev. Lett. 56 ('86) 912; G. Gilbert, 'String theory path integral: genus two and higher', Univ. of Texas preprint UTTG-23-85; M.A. Namazie and S. Rajeev, 'On multi-loop computations in Polyakov's string theory', CERN

preprint Ref. CERN-TH. 4327/85.

8) A. Selberg, 'Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichret series', J. Indian Math. Soc. 20 ('56)47; 久賀道郎, '弱対称リーマン空間における位相解析とその応用', 数学 9 ('58)166; H.P. McKean, 'Selberg's trace formula as applied to a compact Riemann surface', Comm. Pure Applied Math. 25 ('72)225; D.A. Hejhal, 'The Selberg trace formula for PSL(2,ℝ) vol.1', Lecture Note in Math. vol. 548, (Springer, 1976).

9) B. Randol, 'On the analytic continuation of the Minakshisundaram-Pleijel zeta function for compact Riemann surfaces', Trans. Am. Math. Soc. 201 ('75)241.

10) G. Moore and P. Nelson, 'Measure for moduli. The Polyakov string has no nonlocal anomalies', Nucl. Phys. B266 ('86)58.